

LE SÉMINAIRE DE MATHÉMATIQUES 1933–1939

édition réalisée et annotée par
Michèle Audin


1. Année 1933-1934 *Théorie des groupes et des algèbres*

Élie Cartan

Les représentations linéaires des groupes finis

Séminaire de mathématiques (1933-1934), Exposé 1-F, 14 p.

<http://books.cedram.org/MALSM/SMA_1933-1934__1__F_0.pdf>

 Cet article est mis à disposition selon les termes de la licence
CREATIVE COMMONS ATTRIBUTION – PAS DE MODIFICATION 3.0 FRANCE.
<http://creativecommons.org/licenses/by-nd/3.0/fr/>

cedram

Exposé mis en ligne dans le cadre du
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques
<http://www.cedram.org/>

LES REPRÉSENTATIONS LINÉAIRES DES GROUPES FINIS

par **Élie Cartan**

Le problème de la représentation linéaire des groupes finis peut être abordé par deux méthodes distinctes :

- (1) Une méthode qui utilise la théorie des systèmes de nombres hypercomplexes semi-simples ; elle donne immédiatement quelques-uns des théorèmes fondamentaux.
- (2) Une méthode directe qui n'utilise pas la théorie précédente et qui permet d'entrer plus profondément dans la question.

Après quelques indications sommaires sur la première méthode, nous développerons surtout la seconde ; nous aurons ainsi un aperçu simple de la théorie des *caractères* dûe [sic] à *Frobenius* (Sitzungsberichte Berlin 1896-1897-1898-1899-1901-1904). Voir aussi *Burnside* (Proceedings London Math. Soc. 1897-98-1904) et Schur (Sitzungsber. Berlin 1905)^[1]

Plan de l'exposé.

- A.– Aperçu sur la première méthode.
- B.– Quelques propriétés des formes d'Hermité et des substitutions linéaires.
- C.– Groupes finis de substitutions linéaires ; groupes irréductibles et réductibles ; théorèmes de réductibilité complète.
- D.– Groupes irréductibles ; théorèmes d'orthogonalité, caractères.
- E.– Groupes réductibles, caractères.
- F.– Théorèmes fondamentaux sur les représentations linéaires d'un groupe fini.
- G.– Détermination des caractères des représentations linéaires irréductibles d'un groupe. 1/2

A. Aperçu sur la 1ère méthode

1.— Considérons un système de nombres hypercomplexes d'ordre n construit sur le corps des nombres complexes ordinaires^[2] ; soit une base e_1, e_2, \dots, e_n de ce système et

$$a = a^1 e_1 + a^2 e_2 + \dots + a^n e_n$$

un nombre^[3] quelconque de ce système ; soient enfin :

$$e_i e_j = \sum_k \gamma_{ij}^k e_k$$

les γ_{ij}^k étant des nombres complexes ordinaires, les formules de multiplication.

On appelle *équation caractéristique* du système l'équation :

$$\varphi(\omega) = \left| \delta_{ij} \omega - \sum_k a^k \gamma_{ik}^j \right|_{ij} = 0 \quad \delta_{ij} \begin{cases} = 0 & \text{si } i \neq j \\ = 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

qu'on obtient en exprimant l'existence d'un nombre x du système tel que $xa = \omega x$, ω étant un nombre complexe ordinaire.^[4]

En exprimant l'existence d'un nombre y du système tel que $ay = \omega y$, on obtient une équation caractéristique :

$$\bar{\varphi}(\omega) = \left| \delta_{ij} \omega - \sum_k a^k \gamma_{ki}^j \right|_{ij} = 0$$

On appelle *trace* du nombre a du système, la somme des racines de l'équation caractéristique :

$$\sigma(a) = \sum_{i,k} \gamma_{ik}^i a^k$$

2/3

La forme quadratique : $\sigma(a^2) = \sum_{i,j,k,h} \gamma_{ik}^j a^k a^h$ trace de a^2 (et égale à la somme des carrés des racines de l'équation caractéristique relative à a) joue un rôle fondamental : *la condition nécessaire et suffisante pour que le système soit semi-simple est que le discriminant de cette forme ne soit pas nul*. Dans le cas contraire, on obtient le radical du système en annulant les dérivées partielles de la forme par rapport aux a^k . Les mêmes propriétés ont lieu relativement à la forme :

$$\bar{\sigma}(a^2) = \sum_{i,j,h,k} \gamma_{ki}^j \gamma_{kj}^i a^k a^h,$$

liée à l'équation $\bar{\varphi}(\omega) = 0$.

Rappelons d'autre part qu'un système de nombres complexes semi-simple se décompose en systèmes simples dont chacun admet une base matricielle.

2.- Appliquons ce qui précède à un groupe fini G formé de r éléments : $e_0 = 1, e_1, e_2, \dots, e_{r-1}$. Ces r éléments peuvent être regardés comme formant la base d'un système de nombres hypercomplexes (algèbre du groupe) avec une loi de multiplication de la forme : $e_i e_j = e_k$. Dans la forme $\sigma(a^2)$, les seuls termes à coefficients non nuls correspondront à :

$$\gamma_{ki}^j = \gamma_{kj}^i = 1 \text{ ou } e_k e_i = e_j, \quad e_k e_j = e_i$$

c'est à dire que le produit $a^k a^\ell$ ne se présentera que si e_k et e_h sont inverses, son coefficient sera alors r .

3/4

On a donc :

$$\sigma(a^2) = r \sum a^k a^h \quad (e_k = e_h^{-1})$$

Il est évident que cette forme a son discriminant différent de zéro ; par suite l'algèbre du groupe est semi-simple, chacun des sous-systèmes simples définit une représentation linéaire irréductible du groupe G . Si en effet, l'algèbre du groupe se décompose en h sous-systèmes simples et si $e_{ij}^{(\alpha)}$ ($i, j = 1, 2, \dots, n_\alpha$) constituent la base matricielle du α -ième sous-système, si enfin, on a :

$$e_i = \sum_{h,k,\alpha} a_{kh}^\alpha e_{kh}^\alpha$$

la matrice de rang n_α dont les éléments sont a_{kh}^α définit une représentation de G , cette matrice représentant l'élément e_i de G . Cette représentation est irréductible, on obtient ainsi toutes les représentations irréductibles ; en effet, une représentation irréductible fournit un système simple de nombres hypercomplexes homomorphe à l'algèbre du groupe et par suite identique à l'un des sous-systèmes simples de cette algèbre.

On a $r = \sum_{\alpha} n_\alpha^2$. Le nombre des représentations irréductibles est égal à l'ordre du centre de l'algèbre du groupe, c'est à dire, comme nous le verrons, au nombre de classes d'éléments conjugués du groupe.

3.- Ajoutons que le point de vue précédent apporte des compléments intéressants au point de vue réel. L'algèbre du groupe peut en effet être regardée comme construite sur le corps des nombres réels ; à ce point de vue elle constitue encore une algèbre semi-simple, mais ses sous-systèmes simples peuvent être de trois formes distinctes :

4/5

- a) on peut avoir un sous-système d'ordre n^2 à base matricielle construit sur le corps des nombres réels.
- b) on peut avoir un sous-système d'ordre $2n^2$ à base matricielle e_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, n$), les coefficients des unités de base étant des nombres complexes ordinaires.
- c) on peut avoir un sous-système d'ordre $4n^2$ à base matricielle e_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, n$), les coefficients des unités de base étant des quaternions.

La différence entre le nombre de carrés positifs et le nombre de carrés négatifs de la forme quadratique réelle $\sigma(a^2)$ est égale à la différence entre la somme des rangs (n) des sous-systèmes simples de la première catégorie, et la somme des rangs ($2n$) de ceux de la troisième. Or dans le cas d'un groupe G , cette différence est égale, manifestement, au nombre de ceux des éléments du groupe dont le carré est égal à l'unité (l'unité étant comptée).

Pour toutes ces questions, voir E.CARTAN, Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse 12 (1898) « Les groupes bilinéaires et les systèmes de nombres hypercomplexes ».^[5]

II [sic, B]. Méthode directe. Préliminaires. Formes d'Hermité

5/6 4.— Une forme d'Hermité à n variables complexes x_1, x_2, \dots, x_n est une forme bilinéaire par rapport aux deux séries de variables x_i et \bar{x}_i :

$$F(x) = \sum_{i,j} a_{ij} x_i \bar{x}_j \quad (a_{ij} = \bar{a}_{ji})$$

Comme les formes quadratiques, les formes d'Hermité sont réductibles à une somme de carrés de modules $\sum a_i x_i \bar{x}_i$ (a_i réel), la forme est dite *définie* si elle ne s'annule que pour $x_1 = \dots = x_n = 0$

Deux formes d'Hermité, dont l'une F est définie positivement, peuvent toujours être ramenées simultanément à être :

$$\begin{aligned} F &= x_1 \bar{x}_1 + x_2 \bar{x}_2 + \dots + x_n \bar{x}_n && \text{(forme unitaire)} \\ \Phi &= a_1 x_1 \bar{x}_1 + a_2 x_2 \bar{x}_2 + \dots + a_n x_n \bar{x}_n \end{aligned}$$

(on en trouvera une démonstration dans E.Cartan Leçons sur la géométrie projective complexe p.150).^[6]

Regardons x_1, x_2, \dots, x_n comme les composantes d'un vecteur dans un espace à n dimensions (complexes). Deux vecteurs X, X' sont dits orthogonaux par rapport à la forme d'Hermité F si l'on a :

$$\sum_i x'_i \frac{\partial F}{\partial x_i} = 0 \quad \text{ou} \quad \sum_i x_i \frac{\partial F}{\partial x'_i} = 0$$

(les deux premiers membres sont conjugués).

Deux variétés planes^[7] passant par l'origine sont *complètement orthogonales* si tout vecteur de l'une est orthogonal à tout vecteur de l'autre. Si la forme F est définie, deux vecteurs orthogonaux ne peuvent avoir la même direction et deux variétés planes

6/7 orthogonales n'ont aucun vecteur commun.

5.- On appelle substitution linéaire *unitaire* une substitution linéaire laissant invariante la forme d'Hermité unitaire. Si (a_{ij}) est la matrice d'une telle substitution, on a :

$$\sum_k a_{ik} \bar{a}_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

La substitution inverse a pour éléments $b_{ij} = \bar{a}_{ij}$ (sa matrice est la complexe conjuguée de la transposée de la matrice qui représente la première substitution).

Si une substitution linéaire unitaire laisse invariante une variété plane passant par l'origine, elle laisse invariante la variété plane lieu des vecteurs orthogonaux à la variété donnée (par rapport à la forme d'Hermité unitaire). Il y a réciprocity entre ces deux variétés planes, la somme de leurs dimensions est n .

6.- On appelle *équation caractéristique* d'une substitution linéaire S ou matrice (a_{ij}) l'équation $\Delta(\omega) = 0$ où Δ est le déterminant de la matrice $(\delta_{ij}\omega - a_{ij})$. Les racines de l'équation caractéristique sont les racines *caractéristiques* ou racines *latentes*^[8] de S ; leur somme $\sum a_{ii}$ est la *trace* de S .

L'équation caractéristique de $A^{-1}SA$ ($A \neq 0$)^[9] transformée de S par A est identique à celle de S ; il en est de même de la trace; par suite, SS' et $S'S$ ont même trace.

7/8

Deux substitutions *unitaires* inverses l'une de l'autre ont des traces complexes conjuguées.

Si l'on forme la matrice $\Delta(S)$ (c'est un polynôme de degré n en S), elle est identiquement nulle (Cayley). Il peut arriver qu'il existe un polynôme $\psi(S)$ de degré $< n$ qui soit identiquement nul; si ψ est de degré minimum ce degré est le *rang*^[10] de la matrice. Les racines de $\psi(\omega)$ sont identiques à celles de $\Delta(\omega)$ et $\Delta(\omega)$ est naturellement divisible par $\psi(\omega)$ comme tout polynôme $\varphi(\omega)$ tel que la matrice $\varphi(S)$ soit identiquement nulle. Si, par exemple, $S^p = 1$, la trace de S est une somme de n racines p -ièmes de l'unité.

C. Groupes irréductibles & groupes réductibles de substitutions linéaires

7.- Un groupe de substitutions linéaires à n variables x_1, x_2, \dots, x_n est dit *réductible* si l'on peut trouver $p < n$ combinaisons linéaires indépendantes des x_i :

$$X_i = \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k \quad (i = 1, 2, \dots, p)$$

telles que les transformées de chacune des formes X_i par une substitution quelconque du groupe soient des combinaisons linéaires de X_1, X_2, \dots, X_p . Par un changement linéaire de variables, on peut obtenir que les p premières variables x_1, x_2, \dots, x_p soient

transformées entre elles, les coefficients $a_{i,p+1}, \dots, a_{i,n}$ étant nuls pour $i = 1, 2, \dots, p$.

8/9

Un groupe qui n'est pas réductible est dit *irréductible*.

Théorème de réductibilité complète. *Tout groupe fini de substitutions linéaires est irréductible ou décomposable en groupes irréductibles.*

Cet énoncé signifie qu'on peut, par un changement linéaire de variables, supposer partagées les variables en un certain nombre de séries :

$$x_1, x_2, \dots, x_p; \quad y_1, y_2, \dots, y_q; \quad z_1, z_2, \dots, z_s$$

telles que les x_i soient transformées entre elles par un groupe irréductible, etc.

La démonstration repose sur le :

Lemme fondamental. *Tout groupe fini de substitutions linéaires laisse invariante au moins une forme d'Hermite définie positive.*

En effet, soit $F(x)$ une forme définie positive donnée, par exemple, la forme unitaire. Soient $S_0 = E, S_1, \dots, S_{r-1}$ les substitutions du groupe; considérons la forme :

$$\Phi(x) = F_0(x) + F_0(S_1x) + F_0(S_2x) + \dots + F_0(S_{r-1}x)$$

elle est définie positive et évidemment invariante par G .

Ceci posé, si G est irréductible, si par exemple, les variables x_1, \dots, x_p sont transformées entre elles par G , cela veut dire que G laisse invariante la variété plane $x_1 = x_2 = \dots = x_p = 0$; elle laisse donc invariante la variété orthogonale complémentaire, comme elle n'a aucun vecteur commun avec la première, on peut la supposer définie par $x_{p+1} = x_{p+2} = \dots = x_n = 0$, par suite, chaque opération de G se décompose en une substitution linéaire opérant sur les x_i ($i \leq p$) et une substitution opérant sur les x_i ($i > p$). Si les deux groupes ainsi obtenus sont réductibles (ou l'un d'eux), on continuera la réduction.

D. Propriétés des groupes irréductibles. Théorèmes d'orthogonalité. Caractères

8.— Lemme fondamental. *Tout groupe irréductible fini laisse invariante une seule forme d'Hermite (à un facteur constant près).*

Supposons en effet que le groupe laisse invariante deux formes distinctes F et Φ , la première étant définie positive. On peut les réduire simultanément aux formes :

$$F = x_1\bar{x}_1 + \dots + x_n\bar{x}_n$$

$$\Phi = a_1x_1\bar{x}_1 + \dots + a_nx_n\bar{x}_n$$

Si l'on n'avait pas $a_1 = a_2 = \dots = a_n$, on aurait (en changeant au besoin l'ordre des variables) $a_{p+1} = a_{p+2} = \dots = a_n$ les p premiers coefficients étant différents de a_n ; la forme :

$$\Phi - aF = (a_1 - a_n)x_1\bar{x}_1 + \dots + (a_p - a_n)x_p\bar{x}_p$$

serait alors invariante par les substitutions du groupe ainsi que la variété $x_1 = x_2 = \dots = x_p = 0$ et le groupe ne serait pas irréductible.

9. – Théorème d'orthogonalité. Soit G un groupe fini irréductible unitaire et soient $a_{ij}(S)$ les éléments de la matrice S du groupe, on a :

10/11

$$\mathcal{M}a_{ij}(S)\bar{a}_{kh}(S) = \frac{1}{n}\delta_{ik}\delta_{jk}$$

en désignant par $\mathcal{M}\varphi(S)$ la valeur moyenne :

$$\mathcal{M}\varphi(S) = \frac{1}{r} [\varphi(S_0) + \varphi(S_1) + \dots + \varphi(S_{r-1})]$$

Partons de la forme $F_0 = x_1\bar{x}_1$; elle donne naissance à la forme d'Hermité invariante :

$$\sum_S a_{1i}(S)\bar{a}_{ij}(S)x_i\bar{x}_j = \lambda \sum_i x_i\bar{x}_i$$

d'où $\mathcal{M}a_{1i}\bar{a}_{1j} = 0$ si $i \neq j$ et $\mathcal{M}a_{1i}\bar{a}_{1i} = \lambda$

Mais on a pour chaque substitution du groupe :

$$\sum_i a_{1i}\bar{a}_{1i} = 1 \quad \text{d'où} \quad \mathcal{M} \sum_i a_{1i}\bar{a}_{1i} = n\lambda = 1 \quad \lambda = \frac{1}{n}$$

Le théorème est donc démontré pour $i = k = 1$, c'est à dire pour $i = K$

La considération de la substitution S^{-1} du groupe ramène le cas $j = h$ au cas précédent.

Partons maintenant de la forme $x_1\bar{x}_2$ (ce n'est pas une forme d'Hermité mais une combinaison linéaire de deux formes d'Hermité $\frac{1}{2}(x_1\bar{x}_2 + x_2\bar{x}_1)$ et $\frac{1}{2}(x_1\bar{x}_2 - x_2\bar{x}_1)$) elle donne naissance à la forme invariante :

$$\sum_S a_{1i}(S)\bar{a}_{ij}(S)x_i\bar{x}_j = \mu \sum_i x_i\bar{x}_i \quad (\mu \text{ complexe})$$

mais en prenant $i = j$ on voit que $\mu = 0$, donc $\mathcal{M}a_{1i}\bar{a}_{2j} = 0$.

10. – Caractères d'un groupe irréductible. Soit $\chi(S)$ la trace $\sum a_{ii}(S)$ de la matrice S . On a :

11/12

$$\mathcal{M}\chi(S)\bar{\chi}(S) = \mathcal{M}a_{11}\bar{a}_{11} + \mathcal{M}a_{22}\bar{a}_{22} + \dots + \mathcal{M}a_{nn}\bar{a}_{nn} = n\frac{1}{n} = 1$$

Comme la trace ne change pas par un changement de variables on en déduit que :

La valeur moyenne du carré du module du caractère d'un groupe fini irréductible est égale à 1.

Ce théorème est valable même si le groupe n'est pas unitaire.

Dans ce cas, deux substitutions inverses ont des caractères complexes conjugués.

Corollaire. *Il n'existe aucune combinaison linéaire à coefficients fixes des éléments de la matrice S qui soit nulle pour toutes les matrices d'un groupe fini irréductible.*

E. Groupes réductibles. Caractères

11.— Considérons un groupe fini qui se décompose en deux groupes irréductibles l'un à p variables x_1, x_2, \dots, x_p , l'autre à q variables y_1, y_2, \dots, y_q .

Lemme fondamental. *Si les deux groupes irréductibles composants ne sont pas équivalents, le groupe donné ne laisse invariante que les formes d'Hermite $aF(x) + b\Phi(y)$ où a et b sont des constantes arbitraires, F la forme invariante par le premier groupe composant, Φ la forme d'Hermite invariante par le second groupe composant.*

12/13 Toute forme d'Hermite aux $p + q$ variables x_i, y_j peut se mettre sous la forme :

$$F_1(x) + \Phi_1(y) + \psi(x, \bar{y}) + \bar{\psi}(\bar{x}, y)$$

ψ étant bilinéaire par rapport aux deux séries de variables x_i, \bar{y}_j . Il est évident que $F_1(x)$ est de la forme $aF(x)$ et $\Phi_1(y)$ de la forme $b\Phi(y)$. Supposons la forme ψ non identiquement nulle ; supposons par exemple, que, parmi les coefficients de x_1, x_2, \dots, x_p il y ait ℓ formes linéairement indépendantes en $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_q$; on peut alors ramener ψ par un changement linéaire de variables, à la forme :

$$\psi(x, \bar{y}) = x_1\bar{y}_1 + x_2\bar{y}_2 + \dots + x_\ell\bar{y}_\ell$$

Mais alors le premier groupe composant transforme entre elles les variables x_1, x_2, \dots, x_ℓ , donc $p = q = \ell$. D'autre part rien n'empêche de supposer la forme F unitaire ; alors, chaque substitution de G , laissant invariante la forme ψ transforme entre elles les variables y de la même manière que les variables x ; autrement dit, *les deux groupes composants sont équivalents* (et rendus simultanément unitaires). S'ils ne sont pas équivalents, les seules formes invariantes sont $aF(x) + b\Phi(y)$.

12.— **Cas général.** Le lemme précédent se généralise immédiatement :

Théorème fondamental. *Si un groupe linéaire fini G se décompose en groupes irréductibles, à savoir :*

- un groupe $G^{(1)}$ se présentant p_1 fois (c'est à dire p_1 groupes irréductibles équivalents)
- un groupe $G^{(2)}$ se présentant p_2 fois
- ...
- un groupe $G^{(h)}$ se présentant p_h fois

alors si ces groupes composants (et par suite le groupe donné) sont rendus unitaires, on a :

$$\mathcal{M}a_{ij}^{(\alpha)}\bar{a}_{kh}^{(\beta)} \text{ pour } \alpha \neq \beta$$

La démonstration est immédiate. Le résultat reste évidemment vrai si les groupes ne sont pas unitaires.

Corollaire. On a même si les groupes composants ne sont pas unitaires et si $\chi(S)$ désigne le caractère du groupe total :

$$\mathcal{M}\chi^{(\alpha)}(S)\bar{\chi}^{(\beta)}(S) = 0 \quad \text{pour } \alpha \neq \beta$$

$$\mathcal{M}\chi^{(\alpha)}(S)\bar{\chi}^{(\alpha)}(S) = 1$$

$$\mathcal{M}\chi(S)\bar{\chi}^{(\alpha)}(S) = p_\alpha$$

$$\mathcal{M}\chi(S)\bar{\chi}(S) = p_1^2 + p_2^2 + \cdots + p_h^2$$

$$\text{En effet : } \chi(S) = p_1\chi^{(1)}(S) + p_2\chi^{(2)}(S) + \cdots + p_h\chi^{(h)}(S).$$

F. Les théorèmes fondamentaux sur la représentation linéaire d'un groupe fini abstrait

13.— Soit un groupe abstrait G formé de r éléments :

$$e_0 = 1, e_1, e_2, \dots, e_{r-1}.$$

Ce groupe admet une représentation linéaire fidèle, c'est la représentation *régulière*, donnant un groupe linéaire \mathcal{G} à r variables x_0, x_1, \dots, x_{r-1} . L'opération S_i de \mathcal{G} qui correspond à l'élément e_i de G est la substitution linéaire qui transforme la variable x_k dans la variable $x_{k'}$ si :

$$e_{k'} = e_i e_k.$$

Nous allons étudier la réduction complète du groupe \mathcal{G} et montrer qu'elle fournit toutes les représentations linéaires irréductibles de G .

Soit $\chi(e_i)$ le caractère de l'opération S_i de \mathcal{G} . On a manifestement :

$$\chi(e_0) = r \quad \chi(e_1) = \chi(e_2) = \cdots = \chi(e_{r-1}) = 0$$

par suite :

$$(1) \quad \mathcal{M}\chi(S)\bar{\chi}(S) = r$$

Si donc la réduction complète de \mathcal{G} donne k groupes irréductibles composants non équivalents : $\mathcal{G}^{(1)}, \mathcal{G}^{(2)}, \dots, \mathcal{G}^{(k)}$, le groupe $\mathcal{G}^{(\alpha)}$ entrant p_α fois, on a :

$$(2) \quad r = p_1^2 + p_2^2 + \cdots + p_k^2$$

Soit d'autre part, n_α le nombre des variables transformées par $\mathcal{G}^{(\alpha)}$; on a évidemment :

$$\begin{aligned}\mathcal{M}\chi^{(\alpha)}(S)\bar{\chi}(S) &= n_\alpha \quad \text{puisque } \bar{\chi}(S_0) = r\bar{\chi}(S_i) = 0 \\ \mathcal{M}\chi^{(\alpha)}(S)\bar{\chi}(S) &= \mathcal{M}\chi^{(\alpha)}(S) \left[\sum_{\beta} p_\beta \bar{\chi}(S) \right] = p_\alpha\end{aligned}$$

d'où $n_\alpha = p_\alpha$.

Théorème. *Dans la réduction complète de \mathcal{G} , chaque groupe composant $\mathcal{G}^{(\alpha)}$ entre autant de fois qu'il y a de variables transformées par $\mathcal{G}^{(\alpha)}$.*

14. – Corollaire. Les coefficients $a_{ij}^{(\alpha)}(S)$ des matrices des différents groupes composants sont au nombre de :

$$n_1^2 + n_2^2 + \dots + n_\alpha^2 = r$$

^{15/16} et il n'existe aucune relation linéaire à coefficients constants. *Si donc, les groupes composants sont rendus unitaires, leurs coefficients déterminent dans l'espace du groupe un système orthogonal complet.*

15. – Théorème. *Il n'existe pas d'autre représentant linéaire irréductible du groupe abstrait donné que ceux qui se présentent dans la réduction de \mathcal{G} .*

En effet, s'il en existait un autre, tout élément $c_{ij}(S)$ d'une substitution serait de la forme :

$$c_{ij}(S) = \sum_{k,h,\alpha} \lambda_{kh}^{(\alpha)} a_{kh}^{(\alpha)}(S)$$

Mais on connaît :

$$\mathcal{M}c_{ij}(S)\bar{a}_{kh}^{(\alpha)}(S) = 0 \quad \text{d'où } \lambda_{kh}^{(\alpha)} = 0$$

16. – Théorème. *Le nombre des représentants linéaires non équivalents est égal au nombre des classes d'éléments conjugués du groupe donné.*

En effet, l'algèbre du groupe est susceptible de la base matricielle $e_{ij}^{(\alpha)}$. Par suite, le centre de cette algèbre a pour base les h nombres hypercomplexes linéairement indépendants :

$$\sum_{i=1,2,\dots,n_\alpha} e_{ii}^{(\alpha)} \quad (\alpha = 1, 2, \dots, h)$$

D'autre part, soit $\sum a_i e_i$ un nombre du centre ; on aura quelque soit i :

$$\sum_k a_k e_k e_i = \sum_k a_k e_i e_k \quad \text{ou} \quad \sum_k a_k e_i^{-1} e_k e_i = \sum_k a_k e_k$$

Si donc, e_k est un élément du groupe entrant avec le coefficient a_k tous les éléments conjugués entreront avec le même coefficient. Il y a donc dans le centre exactem^{16/17}ent autant de nombres linéairement indépendants qu'il y a de classes d'éléments conjugués.

17.– Théorème. *Un représentant linéaire irréductible est complètement déterminé par les caractères de ses différents éléments.*^[11]

Car s'il existait des représentants linéaires irréductibles non équivalents (et n'ayant pas nécessairement le même nombre de variables), de caractères $\chi(S)$ et $\chi'(S)$ on aurait

$$\mathcal{M}\chi(S)\bar{\chi}'(S) = 0$$

d'où, dans le cas qui nous occupe :

$$\mathcal{M}\chi(S)\bar{\chi}(S) = 0$$

18.– Théorème. *Les caractères des différents éléments d'un groupe linéaire fini sont des entiers algébriques.*

Soit S un élément du groupe, p l'exposant auquel il appartient ($S^p = 1$) ; le caractère $\chi(S)$ est une somme de n racines p -ièmes de l'unité ($n =$ nombre de variables transformées par le groupe). Si $p = 1$, $\chi(S) = n$ si $p = 2$, $\chi(S)$ est un entier naturel de même parité que n et inférieur ou égal à $n - 2$ en valeur absolue.

G. Détermination des caractères des représentants irréductibles

19.– Soit une représentation irréductible, $\chi^{(\alpha)}$ ses caractères. Appelons caractère d'un nombre $\sum a_k e_k$ de l'algèbre du groupe le nombre complexe ordinaire $\sum a_k \chi^{(\alpha)}(e_k)$. 17/18

Ces caractères jouissent des propriétés suivantes :

- (1) $\chi^{(\alpha)}(e_i e_j) = \chi^{(\alpha)}(e_j e_i)$
- (2) Soient c et c' deux nombres quelconques du centre :

$$c = \sum_{\beta, i} c_{\beta} e_{ii}^{(\beta)} \quad c' = \sum_{\beta, i} c'_{\beta} e_{ii}^{(\beta)}$$

On a :

$$\chi^{(\alpha)}(c)\chi^{(\alpha)}(c') = n_{\alpha}\chi^{(\alpha)}(cc') \text{ ou } n_{\alpha}c_{\alpha}n_{\alpha}c'_{\alpha} = n_{\alpha}n_{\alpha}c_{\alpha}c'_{\alpha}$$

- (3) On a la relation :

$$\sum_i \chi^{(\alpha)}(e_i)\bar{\chi}^{(\alpha)}(e_i) = r$$

Réciproquement, considérons dans l'espace du groupe une fonction linéaire $\xi(a) = \sum a_k \xi(e_k)$ satisfaisant aux conditions :

- (1) $\xi(e_i e_j) = \xi(e_j e_i)$
- (2) $\xi(c)\xi(c') = n\xi(cc')$ (n est un entier positif et c' appartient au centre).
- (3) $\sum \xi(e_i)\bar{\xi}(e_i) = r$

les $\xi(e_i)$ sont les caractères d'une représentation linéaire irréductible.

En effet, la relation (1) montre que $\xi(e_i)$ est le même pour deux éléments conjugués du groupe abstrait.

Posons maintenant $\mathcal{E}_\alpha = \sum_{i=1}^n e_{ii}^{(\alpha)}$; on a :

$$\mathcal{E}_\alpha^2 = \mathcal{E}_\alpha \text{ et } \mathcal{E}_\alpha \mathcal{E}_\beta = 0 \quad (\text{pour } \alpha \neq \beta)$$

Les relations (2) donnent, en faisant $c = c' = \mathcal{E}_\alpha$, puis $c = \mathcal{E}_\alpha$, $c' = \mathcal{E}_\beta$:

$$[\xi(\mathcal{E}_\alpha)]^2 = n\xi(\mathcal{E}_\alpha) \quad \xi(\mathcal{E}_\alpha)\xi(\mathcal{E}_\beta) = 0 \quad \alpha \neq \beta$$

18/19 Il y a donc un seul $\xi(\mathcal{E}_\alpha)$ différent de zéro et égal à n . Il en résulte que $\xi(e_i) = \frac{n}{n_\alpha} \chi^{(\alpha)}(e_i)$. Mais (3) montre que $n = n_\alpha$, $\xi(e_i) = \chi^{(\alpha)}(e_i)$.

20.— Supposons connu le caractère $\chi^{(\alpha)}$. Pour obtenir le groupe linéaire irréductible $\mathcal{G}^{(\alpha)}$, formons :

$$\chi^{(\alpha)}(a) = \sum a_k \chi^{(\alpha)}(e_k) = \sum_{i=1}^n a_{ii}^{(\alpha)}.$$

Les nombres du centre dont le caractère est nul sont les combinaisons linéaires des \mathcal{E}_β autres que \mathcal{E}_α . L'ensemble des nombres de l'algèbre du groupe dont le produit par tous ces \mathcal{E}_β est nul constitue le sous-système simple de base $e_{ii}^{(\alpha)}$. (On peut encore prendre dans le centre un nombre ayant tous ses produits par les \mathcal{E}_β nuls, à savoir \mathcal{E}_α . Les produits $\mathcal{E}_\alpha e_i$ donnent le sous-système simple cherché). La recherche d'une base matricielle de ce sous-système est un problème qui a été exposé par M. Dieudonné (exposé D par.6). On peut encore remarquer que l'identification entre un nombre a du sous-système et le nombre $\sum a_{ij}^{(\alpha)} e_{ij}^{(\alpha)}$ revient à la résolution des n_α équations suivantes où les a sont des fonctions linéaires inconnues de $a_{ij}^{(\alpha)}$:

$$\begin{aligned} \chi^{(\alpha)}(a) &= \sum_i a_{ii}^{(\alpha)} \\ \chi^{(\alpha)}(a^2) &= \sum_{i,j} a_{ij}^{(\alpha)} a_{ji}^{(\alpha)} \\ \chi^{(\alpha)}(a^3) &= \sum_{i,j,k} a_{ij}^{(\alpha)} a_{jk}^{(\alpha)} a_{ki}^{(\alpha)} \\ &\dots \\ \chi^{(\alpha)}(a^{n_\alpha}) &= \sum_{1, \dots, i_{n_\alpha}} a_{i_1 i_2}^{(\alpha)} a_{i_2 i_3}^{(\alpha)} a_{i_3 i_4}^{(\alpha)} \dots a_{i_{n_\alpha} i_1}^{(\alpha)} \end{aligned}$$

19/20 Les seconds membres de ces équations sont des invariants de la matrice $(a_{ij}^{(\alpha)})$ par un changement linéaire de variables (ce sont les sommes des puissances semblables des racines latentes de la matrice).

Si l'on choisit pour matrice représentative d'un nombre a , dont l'équation caractéristique a des racines latentes toutes distinctes, une matrice *diagonale*, ce qui entraîne le choix des matrices représentatives de $a^2, a^3, \dots, a^{n_\alpha}$ toute solution des équations ci-dessus compatible avec les conditions précédentes donne, ou bien les matrices $\mathcal{G}^{(\alpha)}$, ou bien ces *matrices transposées*.

Au point de vue de la réalité, supposons les $\chi^{(\alpha)}(e_i)$ tous réels. La forme $\chi^{(\alpha)}(a^2)$ est une forme quadratique réelle de rang n_α . La différence entre le nombre des carrés positifs et celui des carrés négatifs est n_α ou $-n_\alpha$ (ce dernier cas ne pouvant se présenter que si n est pair). Dans le premier cas, on peut choisir une base matricielle réelle, le groupe $\mathcal{G}^{(\alpha)}$ étant ainsi à coefficients réels. Dans le second cas, on peut trouver pour $\mathcal{G}^{(\alpha)}$ un groupe linéaire à $\frac{n_\alpha}{2}$ variables quaternioniennes à paramètres quaternioniens.

Si les $\chi^{(\alpha)}(e_i)$ ne sont pas tous réels, il existe un autre représentant linéaire $\mathcal{G}^{(\beta)}$ tel que $\chi^{(\beta)}(e_i) = \chi^{-(\alpha)}(e_i)$ avec le même nombre $n_\beta = n_\alpha$ de variables.

Par exemple, le groupe alterné de quatre lettres admet deux représentants linéaires conjugués à une variable.

20/21

Le groupe symétrique de n lettres admet des caractères tous entiers naturels et des représentants tous à coefficients réels, et même entiers. Il n'en est plus de même pour le groupe alterné.

Références.

Van der Waerden, Moderne Algebra, Bd.II. chap.XVII (surtout la fin)

Weyl, Gruppen Theorie und Quantenmechanik.

Notes

1. Les articles ou ouvrages évoqués sont, une série d'articles de Frobenius que l'on trouvera dans le volume 3 de ses Œuvres complètes [Fro68] (sous les numéros 53 à 73), les articles numérotés [1896d] et [1898f, g et h] dans le volume I et [1904c] dans le volume II des Œuvres de Burnside [Bur04a, Bur04b], ainsi que l'article [Sch05] de Schur. Sont aussi cités, l'article [Car98] de l'auteur lui-même et les deux items de la bibliographie « officielle », toujours le deuxième tome [vdW31] du livre de van der Waerden et le livre d'Hermann Weyl [Wey28].
2. Il s'agit donc d'une algèbre sur \mathbf{C} , de dimension n .
3. Un « nombre » est, tout simplement, un élément d'un ensemble de nombres.
4. La multiplication à droite par a est un endomorphisme de l'algèbre, on écrit que ω en est une valeur propre. La notation entre barres verticales désigne bien entendu le déterminant.
5. L'article [Car98], dont le titre ne contient pas le mot « hypercomplexes » mais bien le mot « complexes ».
6. C'est-à-dire dans le livre [Car31] (noter que ce livre provient d'un cours professé par Élie Cartan et de notes prises par Frédéric Marty, un des orateurs du séminaire).
7. Une variété plane passant par l'origine est, bien entendu, un sous-espace vectoriel.
8. Je dirai quelque jour vos naissances latentes. Le terme de valeur propre n'existait pas encore...

9. Il n'y a pourtant aucun doute qu'Élie Cartan savait qu'il existe des matrices non nulles et non inversibles...
10. La terminologie n'était toujours pas fixée... Le mot « rang » a bien été retenu, mais pas pour désigner, comme ici, le degré du polynôme minimal.
11. Voir la note 3. Ici le système hypercomplexe a des nombres et le groupe a des éléments.

Des archives du séminaire...

Compte-rendu de la séance du 19 Février 1934

1. La séance est ouverte à 16h.30. Nouvel assistant : Mademoiselle Charpentier.
2. M.CARTAN fait un exposé sur la représentation linéaire des groupes finis.
3. Quelques questions sont posées par M.Hadamard et Weil. M.Julia remercie très vivement au nom de tous M.Cartan.
4. Thé. Conversations. La séance est levée à 18h.30 ⁽¹⁾.

Références

- [Bur04a] W. BURNSIDE – *Collected Works. Vol. I*, Oxford University Press, 2004.
- [Bur04b] ———, *Collected Works. Vol. II*, Oxford University Press, 2004.
- [Car98] É. CARTAN – « Les groupes bilinéaires et les systèmes de nombres complexes », *Ann. Fac. Sci. Toulouse* **12** (1898), p. B1–B99.
- [Car31] ———, *Leçons sur la géométrie projective complexe*, Cahiers scientifiques, Gauthier-Villars, Paris, 1931.
- [Fro68] F. FROBENIUS – *Gesammelte Abhandlungen. Band 3*, Springer, 1968, éditées par J-P. Serre.
- [Sch05] I. SCHUR – « Neue Begründung der Theorie der Gruppencharaktere », *Sitzungsberichte der Preussigen Akademie der Wissenschaften* (1905), p. 406–432.
- [vdW31] B. VAN DER WAERDEN – *Moderne Algebra. Unter Benutzung von Vorlesungen von E. Artin und E. Noether. Bd. II*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete, Springer, 1931.
- [Wey28] H. WEYL – *Gruppentheorie und Quantenmechanik*, Hirzel, Leipzig, 1928.

1. Une page ronéotée. Archives de l'IHP.