Séminaire de mathématiques 11 décembre 1933
Exposé 1-C, p. 1 à 8

# GRANDEURS IDEMPOTENTES

par **René de Possel**

## I. Définitions

**1.– Anneaux.** Nous allons étudier la structure des *anneaux* ou systèmes d'éléments dans lesquels il existe une addition toujours commutative, et une multiplication, en général non commutative, et distributive par rapport à l'addition.[1]

L'anneau formera un groupe abélien, ou module vis à vis de l'addition : il y aura donc un *zéro*, mais pas nécessairement une *unité*.

Plus précisément, nous nous bornerons à certains anneaux satisfaisant à des conditions générales et toujours vérifiées en particulier par les « *systèmes hypercomplexes* » qui seront définis plus tard.[2]

**2.– Opérateurs.** Nous supposerons toujours qu'à l'anneau est attaché un certain ensemble d'opérateurs, dont les uns, $\lambda, \dots$ opèrent *à gauche*, et les autres, $\mu, \dots$ opèrent *à droite*[3]. Ainsi, si $a \in \mathfrak{o}$, les symboles $\lambda a$, $a\mu$ seront des éléments de $\mathfrak{o}$. Le cas où il n'y a pas d'opérateurs se confond avec celui où il n'y a que l'opérateur unité. Nous supposons que les opérateurs $\lambda, \dots, \mu, \dots$ vérifient les conditions

$$\begin{aligned} &\lambda(a+b) = \lambda a + \lambda b && (a+b)\mu = a\mu + b\mu \\ &\lambda(ab) = (\lambda a)b = a(\lambda b) && (ab)\mu = a(b\mu) = (a\mu)b \end{aligned} \tag{1}$$

mais nous ne supposons rien entre les deux opérateurs.

**3.– Idéaux.** Un *idéal à gauche* $\mathfrak{a}$ *dans* $\mathfrak{o}$ est un sous-anneau de $\mathfrak{o}$ qui admet comme opérateurs : 1/2

tous les éléments de $\mathfrak{o}$ à gauche

$\lambda, \dots$ à gauche

$\mu, \dots$ à droite

Autrement dit, si $a \in \mathfrak{a}$, $r \in \mathfrak{o}$, $ra$, $\lambda a, \dots$, $a\mu, \dots$ sont des éléments de $\mathfrak{a}$.

Un *idéal à droite* a même définition en prenant les éléments de $\mathfrak{o}$ comme opérateurs à droite.

Un système d'éléments qui est idéal à gauche et à droite est appelé *idéal bilatère.*[4]

Pour que $\mathfrak{a}$ soit idéal à gauche, il faut et il suffit

(1) que $\mathfrak{a}$ forme un groupe abélien pour l'addition, autrement dit que $a \in \mathfrak{a}$, $b \in \mathfrak{a}$ entraîne $a - b \in \mathfrak{a}$

(2) que $ra$ $(r \in \mathfrak{a})$, $\lambda a, \dots a\mu, \dots$ appartiennent à $\mathfrak{a}$.

La somme, le produit de deux idéaux à gauche sont encore des idéaux à gauche d'après les relations (1). À noter l'inégalité $\mathfrak{o}\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{a}$ (si $\mathfrak{o}$ possède une unité à gauche, c'est l'égalité qui a lieu).

Nous considérerons souvent des anneaux vérifiant l'une des conditions suivantes :

— Il n'existe pas de suite infinie croissante d'idéaux à gauche (à droite).

— Il n'existe pas de suite infinie décroissante d'idéaux à gauche (à droite).

Ce sont les conditions souvent appelées « Teilerkettensatz » et « Vielvachenketten-
2/3 satz » [sic, Vielfachenkettensatz]

Nous dirons dans cet exposé *condition maximale à gauche* (ou à droite) pour la première, et *condition minimale à gauche* (ou à droite) pour la deuxième.[5]

## II. Radical d'un anneau

**4.–.** L'idéal $\mathfrak{a}$ est dit *nilpotent* si une puissance de $\mathfrak{a}$ est l'idéal (0).

Le théorème que nous avons en vue est le suivant :

*L'ensemble réunion des éléments de tous les idéaux nilpotents à gauche et à droite, ensemble nommé radical, est un idéal bilatère. Si $\mathfrak{o}$ satisfait à la condition maximale à gauche (ou à droite) ce radical est lui-même nilpotent.*

Pour cela, on démontre d'abord que la somme de deux idéaux à gauche nilpotents $\ell_1$ et $\ell_2$ $(\ell_1^n = \ell_2^m = (0))$ est nilpotent. Il suffit de développer $(\ell_1 + \ell_2)^{n+m-1}$.

Puis on montre que tout idéal à gauche (ou à droite) nilpotent est contenu dans un idéal bilatère nilpotent. En effet, $\ell$ est contenu dans l'idéal bilatère $\ell + \ell\mathfrak{o}$ qui est nilpotent comme somme de deux idéaux nilpotents.

$$(\ell\mathfrak{o})^p = \ell(\mathfrak{o}\ell)^{p-1}\mathfrak{o} \subseteq \ell^p\mathfrak{o} = (0).$$

Soient maintenant $w_1$ et $w_2$ deux éléments du radical c'est-à-dire contenus respectivement dans des idéaux nilpotents. Ils sont aussi contenus dans des idéaux bilatères nilpotents $\mathfrak{w}_1$ et $\mathfrak{w}_2$ donc $w_1 - w_2$ est contenu dans $\mathfrak{w}_1 + \mathfrak{w}_2$ qui est un idéal nilpotent.
3/4 Les autres conditions sont évidemment réalisées : $rw_1$, $w_1r$ $(r \in \mathfrak{o})$, $\lambda w_1$, $w_1\mu$, sont contenus dans $\mathfrak{w}_1$ ; donc le radical est idéal bilatère.

Si $\mathfrak{o}$ vérifie la condition maximale, il existe un idéal bilatère nilpotent $\mathfrak{r}$ qui n'est contenu dans aucun autre plus grand. Si l'idéal bilatère nilpotent $\mathfrak{a}$ n'était pas contenu dans $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{a} + \mathfrak{r}$ serait plus grand que $\mathfrak{r}$ et nilpotent, imposible. Donc $\mathfrak{r}$ est le radical.

Signalons que le *quotient* d'un anneau par son radical ou *anneau des classes de restes* par rapport au radical, est lui-même un anneau sans radical (Cf. Van der Waerden, Bd II p.155).

Sur les anneaux avec radicaux, peu de résultats sont connus (Voir Artin : Zur Theorie der Hyperkomplexen Zahlen, Abhandl. Hamburg Sem. Bd.5 1927).

Nous allons étudier la structure de *l'anneau sans radical*, dûe [sic] à Macclagan Wedderburn.[6]

## III. Décomposition d'un anneau sans radical

**5.– Définition.** Un idéal à gauche dans $\mathfrak{o}$ est dit *simple* s'il ne contient aucun autre idéal que lui-même et l'idéal (0).

Nous dirons qu'un idéal à gauche $\mathfrak{a}$ est la *somme directe* des idéaux à gauche $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_n$

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1 \oplus \mathfrak{a}_2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{a}_n \qquad \text{(notation due à Dickson)}$$

si en considérant $\mathfrak{a}$ et les $\mathfrak{a}_i$ comme des groupes abéliens vis à vis de l'addition, $\mathfrak{a}$ est le *produit direct des* $\mathfrak{a}_i$. 4/5

Pour qu'il en soit ainsi il faut et il suffit que

$$0 = a_1 + \cdots + a_n \quad (a_i \in \mathfrak{a}_i) \text{ entraîne } a_1 = 0, \ldots, a_n = 0.$$

Dans le cas de deux termes, il suffit que $\mathfrak{a}_1$ et $\mathfrak{a}_2$ n'aient pas d'autre élément commun que 0, car $0 = a_1 + a_2$ entraîne que $a_1$ et $a_2$ appartiennent au même idéal.

Soit une correspondance qui à tout élément $a$ de l'idéal à gauche (à droite) $\mathfrak{a}$ fait correspondre un élément $\overline{a}$ de l'anneau $\mathfrak{o}$. Nous dirons que c'est une *homomorphie d'opérateurs à gauche* (*à droite*) si les conditions suivantes sont vérifiées :

$$(2) \qquad \begin{gathered} (\overline{a+b}) = \overline{a} + \overline{b} \\ \overline{ra} = r\overline{a} \quad (\overline{ar} = \overline{a}r) \\ \overline{\lambda a} = \lambda\overline{a}, \ldots \quad \overline{a\mu} = \overline{a}\mu \ldots \end{gathered}$$

À remarquer qu'une telle transformation n'est pas en général une *homomorphie d'anneaux* qui exigerait

$$\overline{ab} = \overline{a}\overline{b}$$

On voit que l'ensemble des éléments $\overline{a}$ décrit un idéal à gauche (à droite) $\mathfrak{a}$. En d'autres termes, il s'agit d'une homomorphie de groupes, avec comme opérateurs, à gauche tous les éléments de $\mathfrak{o}$ et les $\lambda$, à droite, les $\mu$.

On vérifie aisément que l'ensemble des éléments de $\mathfrak{a}$ qui sont représentés sur le zéro constitue lui-même un idéal dans $\mathfrak{r}$. Si le zéro est seul représenté sur le zéro, l'homomorphie est une isomorphie.

**6.– Ceci posé, démontrons le théorème fondamental.** *Un anneau* $\mathfrak{o}$ *sans radical*
5/6 *avec condition minimale pour les idéaux à gauche (à droite) possède une unité et est somme directe d'idéaux à gauche (à droite) simples.*

*Réciproquement : un anneau avec unité qui est somme directe d'idéaux à gauche (à droite) simples, est un anneau sans radical et vérifie la condition minimale pour les idéaux à gauche (à droite).*

Pour le démontrer, nous donnerons d'abord plusieurs lemmes.

**7.– Lemme I.** *Soit* $\ell$ *un idéal à gauche,* $a \in \mathfrak{o}$*. Si à tout* $x \in \ell$*, on fait correspondre* $xa$*, la correspondance est une isomorphie d'opérateurs à gauche. Les éléments* $xa$ *forment un idéal.*

En effet les conditions (3)[7] se vérifient immédiatement en tenant compte de (1)

$$(x+y)a = xa + ya$$
$$(rx)a = r(xa)$$
$$(\lambda x)a = \lambda(xa) \qquad (x\mu)a = x(a\mu)$$

**8.– Lemme II.** *Par une homomorphie d'opérateurs, un idéal à gauche simple* $\ell$ *est représenté sur le* $\mathfrak{o}$ [0] *ou bien l'homomorphie est une isomorphie.*

En effet, l'ensemble des éléments de $\ell$ qui sont représentés sur le zéro forment [sic] un idéal contenu dans $\ell$, donc qui est (0) ou $\ell$. Dans le premier cas on a une isomorphie.

6/7

**9.– Définition.** Un élément $e$ est dit *idempotent* si

$$e^2 = e$$

**10.– Lemme III.** *Un idéal à gauche simple* $\ell$ *étant donné, ou bien il est nilpotent, et alors* $\ell^2 = 0$*, ou bien il contient un élément idempotent* $e$ *et l'on a* $\ell = \mathfrak{o}e$

Supposons $\ell^2 \neq 0$. Il existe alors $a$ dans $\ell$ tel que $\ell a \neq (0)$. Mais $\ell a$ étant un idéal non nul contenu dans $\ell$ est identique à $\ell$. La correspondance entre $\ell$ et $\ell a$ est une isomorphie (lemme II). Il existe donc $e$ dans $\ell$ tel que $a = ea$. On en déduit $ea = e^2 a$. Donc, dans l'isomorphie précédente, les éléments $e$ et $e^2$ sont menés sur le même élément, d'où $e = e^2$.

L'idéal $\mathfrak{o}e$ n'est pas nul puisqu'il contient $e^2 = e$ et il est contenu dans $\ell$ donc égal à $\ell$.

**11.– Lemme IV.** *Si* $e$ *est idempotent et* $\ell = \mathfrak{o}e$ *(pas nécessairement simple),* $\mathfrak{o}$ *est somme directe de* $\ell$ *et d'un autre idéal à gauche.*

$$\mathfrak{o} = \ell \oplus \ell'$$

$$\textit{De plus} \quad xe = x \quad \text{si } x \in \ell$$
$$x'e = 0 \quad \text{si } x' \in \ell'$$

Écrivons $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}e + (\mathfrak{a} - \mathfrak{a}e)$ Les éléments $\mathfrak{a}e$ forment l'idéal $\mathfrak{o}e$. On vérifie immédia- 7/8
tement que les $\mathfrak{a} - \mathfrak{a}e$ forment un idéal à gauche $\mathfrak{o}e$. Enfin :

$$\mathfrak{a}e \cdot e = \mathfrak{a}e \text{ et } (\mathfrak{a} - \mathfrak{a}e)e = 0$$

Le seul élément commun à $\ell$ et $\ell'$ ne peut être que le 0. La somme est directe.

**12.– Démonstration du théorème fondamental.** $\mathfrak{o}$ vérifiant la condition minimale, contient un idéal à gauche simple, non nul, $\ell_1$.

$\mathfrak{o}$ étant sans radical, $\ell_1$ contient un idempotent $e_1$, tel que $\ell_1 = \mathfrak{o}e_1$ et $\mathfrak{o} = \ell \oplus \ell'$.

De même $\ell'$ contient un idéal à gauche $\ell_2$ avec

$$\ell_2 = \mathfrak{o}e_2 \qquad \mathfrak{o} = \ell_2 \oplus \ell \text{ et } \ell' = \ell_2 \oplus \ell'' \text{ d'où } \mathfrak{o} = \ell_1 \oplus \ell_2 \oplus \ell''$$

La suite $\mathfrak{o}$ $\ell'$ $\ell''$... est décroissante, donc contient un idéal simple $\ell_n$

$$\begin{cases} v = \ell_1 \oplus \ell_2 \oplus \cdots \oplus \ell_n \\ \ell_i = \mathfrak{o}\ell_i \\ e_i^2 = e_i \in \ell_i \end{cases}$$

*Existence d'une unité.* Posons $e_{12} = e_1 + e_2 - e_1e_2$ d'où $e_{12}^2 = e_{12}$. $e_{12}$ est un idempotent de $\ell_1 \oplus \ell_2$. Parmi ses multiples à gauche on trouve $e_1$ et $e_2$ donc tout élément de $\ell_1 \oplus \ell_2$, et l'on a :

$$\ell_1 \oplus \ell_2 = \mathfrak{o}e_{12} \qquad e_k e_{12} = 0 \text{ pour } k > 2.$$

On opère de même avec $e_{12}$ et $e_3$, d'où $e_{123}$ tel que 8/9

$$\ell_1 \oplus \ell_2 \oplus \ell_3 = \mathfrak{o}e_{123}$$

jusqu'à $e_{12\ldots n}$ avec $\mathfrak{o}e = \ell_1 \oplus \cdots \oplus \ell_n$ et $e^2 = e$. On en conclut d'après le lemme IV que $e$ est unité à droite.

Supposons que $e$ ne soit pas unité à gauche. On aurait (lemme IV) avec changement de droite en gauche

$$\mathfrak{o} = e\mathfrak{o} \oplus \mathfrak{r} \qquad e\mathfrak{r} = 0.$$

Mais $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}e$ puisque $e$ est unité à droite. Donc $\mathfrak{r}^2 = \mathfrak{r}e\mathfrak{r} = (0)$. L'anneau étant sans radical, on en conclut $\mathfrak{r} = 0$ et $\mathfrak{o} = e\mathfrak{o}$. D'après le lemme IV avec changement de droite en gauche, $e$ est unité à gauche.

**13.– Démonstration de la réciproque.**

**Lemme V.** *Si* $\mathfrak{o}$ *a une unité* 1*, si* $\mathfrak{o} = \ell_1 \oplus \cdots \oplus \ell_n$ *et si* $1 = e_1 + \cdots + e_n$ *avec* $e_i \in \ell_i$ *on a*

$$\ell_i = \mathfrak{o}e_i \qquad e_i^2 = e_i \qquad e_ie_k = 0 \text{ pour } i \neq k$$

Pour la démonstration cf. Van der Waerden t.II p.160.[8]

Supposons que $\mathfrak{o}$ soit somme directe de $n$ idéaux à gauche simples comme on l'a vu en théorie des groupes avec opérateurs. $\mathfrak{o}$ admet alors une *série de composition*

de longueur $n$. Tout idéal à gauche (ou sous-groupe permis) possède une série de composition de longueur au plus $n$, ce qui oblige toute suite croissante ou décroissante d'idéaux à gauche, à n'avoir qu'un nombre fini de termes. Par conséquent, $\mathfrak{o}$ vérifie
9/10 les conditions maximale et minimale à gauche.

Supposons de plus que $\mathfrak{o}$ possède une unité, et supposons qu'il existe un idéal nilpotent $\ell : \ell^p = (0)$. On a alors

$$\mathfrak{o} = \ell \oplus \ell'$$

D'après le lemme V il y a dans $\ell$ un élément idempotent $e_1$. Comme $\ell^p = 0$ on en conclut $e_1 = 0$ et $\ell = (0)$. Impossible.[9]

## IV. Décomposition en idéaux bilatères

**14.–.** Supposons que l'on ait

$$\mathfrak{o} = \mathfrak{a}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{a}_n$$

les $\mathfrak{a}_i$ étant des idéaux bilatères. Le produit $\mathfrak{a}_i\mathfrak{a}_k$ $(i \neq k)$ est contenu dans $\mathfrak{a}_i$ et dans $\mathfrak{a}_k$ donc est nul puisque la somme est directe.

Si l'on considère les $\mathfrak{a}_i$ non plus comme idéaux dans $\mathfrak{o}$ mais comme anneaux avec les $\lambda, \mu \ldots$ comme opérateurs, mais non les éléments de $\mathfrak{o}$, on vérifie aisément que tout idéal bilatère dans l'anneau $\mathfrak{a}_i$ est aussi un idéal bilatère dans $\mathfrak{o}$. Par conséquent, si les $\mathfrak{a}_i$ sont des idéaux bilatères simples dans $\mathfrak{o}$, ce sont des anneaux indécomposables en idéaux bilatères. On dit que ce sont des *anneaux simples.*

D'autre part, s'il y a une unité dans $\mathfrak{o}$, la décomposition (3)[10] en anneaux simples est unique, contrairement à ce qui se passe pour la décomposition en idéaux unilatères.
10/11 Pour le voir, il suffit d'écrire deux décompositions différentes, et l'on montre que chaque terme de l'une est contenu dans un terme de l'autre.

Si nous appliquons les théorèmes de décomposition à un *anneau commutatif* sans radical, vérifiant la condition minimale, nous obtenons une décomposition en anneaux simples dont chacun possède une unité. Mais tout anneau commutatif simple est un *corps* car les multiples $ax$ de l'élément $a \neq 0$ forment un idéal non nul, donc qui est l'anneau lui-même.

*L'anneau est donc une somme de corps* (Théorème de Dedekind) *dont les produits deux à deux sont nuls.*

**15.– Centre.** On appelle *centre* d'un anneau $\mathfrak{o}$ l'ensemble des éléments de $\mathfrak{o}$ qui sont permutables avec tous les éléments de $\mathfrak{o}$, c'est à dire $ax = xa$.

On vérifie immédiatement que le centre est un sous-anneau admettant les opérateurs $\lambda, \mu \ldots$ commutatif et auquel appartient l'unité s'il y en a une.

On montre aisément que l'existence d'un radical non nul dans le centre entraîne celle d'un radical non nul dans $\mathfrak{o}$.

Enfin, si $\mathfrak{o}$ est somme directe d'idéaux bilatères

$$\mathfrak{o} = \mathfrak{a}_1 \oplus \mathfrak{a}_2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{a}_n$$

le centre est somme directe des centres des $\mathfrak{a}_i$.[11]

## Notes

1. Les références pour cet exposé sont les articles d'Emil Artin [Art27], de Wedderburn [Wed08], et toujours le livre [vdW31].
2. Les systèmes hypercomplexes sont les algèbres de dimension finie. Ils sont dans la note historique du premier chapitre d'algèbre de Bourbaki [Bou42], en 1942. Dans le chapitre II [Bou47], cinq ans plus tard, ils ont un peu perdu en notoriété puisque c'est « algèbre (ou système hypercomplexe) » qui est défini.
3. Ce type de notations (qu'y a-t-il dans les ... derrière le $\lambda$ qui ne contienne pas de $\mu$) fait partie du charme des textes de cette époque.
4. Comme annoncé dans les notes de cet exposé, la terminologie « idéal des deux côtés » de l'exposé 1-A n'a pas fait long feu.
5. Comme nous l'avons signalé dans les notes de l'exposé 1-B, la première de ces conditions est la condition de chaînes ascendantes (et l'anneau est dit noethérien). La deuxième est la condition de chaînes descendantes (et l'anneau est dit artinien).
6. Il est question ici du mathématicien écossais Wedderburn (c'est son nom) Joseph Henry Maclagen (ce sont ses prénoms), 1882–1948, qui fit presque toute sa carrière à Princeton.
7. Il n'y a pas de conditions (3), ce sont sans doute celles du paragraphe 3.
8. Le livre de van der Waerden est en effet la source directe de ce texte.
9. Sur l'exemplaire de l'IHP, était tapé : « Nous arrivons à une contradiction », qui a été rayé à la main et au stylo et remplacé par cet « Impossible ». Clairement une correction d'auteur, qui a été prise en compte pour la « deuxième » frappe, celle de l'exemplaire de l'IRMA.
10. Il n'y a pas de décomposition (3)... lisons « la décomposition en anneaux simples ».
11. Renvoyons au beau diagramme que l'on trouve dans [Bou58], vingt-cinq ans après

$$\begin{tikzcd}
 & \text{(a) algèbre sans radical} & \\
\text{(b) algèbre séparable} \arrow[ur, Rightarrow] & & \text{(c) algèbre semi-simple} \arrow[ul, Rightarrow] \\
 & \text{(d) algèbre absolument semi-simple} \arrow[ul, Rightarrow] \arrow[ur, Rightarrow] &
\end{tikzcd}$$

($A$ est séparable (resp. absolument semi-simple) si pour toute extension commutative $L$ de $K$, $A \otimes_K L$ est sans radical (resp. semi-simple)) ; avec en outre c $\Leftrightarrow$ a et d $\Leftrightarrow$ b en dimension finie et c $\Leftrightarrow$ d et a $\Leftrightarrow$ b sur un corps parfait.

### Des archives du séminaire...

### Compte-rendu de la séance du 11 Décembre 1933

1. La séance est ouverte à 16h.30. Nouvel assistant : M.JANET.

2. M.JULIA propose de modifier les dates des séances de Janvier ; elles auront lieu les 15 et 29 au lieu des 8 et 22. Adopté.

3. La parole est donnée à M. De Possel qui expose la théorie des grandeurs idempotentes

4. M.Julia remercie l'orateur. Puis il exprime un vœu général en demandant que dans les exposés figurent quelques références bibliographiques [1].

5. Thé. Discussion. Séance levée à 18h.45 [2].

---

## Références

[Art27] E. ARTIN – « Zur Theorie der hyperkomplexen Zahlen », *Abhandlungen Hamburg* **5** (1927), p. 251–260.

[Bou42] N. BOURBAKI – *Éléments de mathématique. Algèbre. Chapitre 1*, Hermann, Paris, 1942.

[Bou47] ———, *Éléments de mathématique. Algèbre. Chapitre 2*, Hermann, Paris, 1947.

[Bou58] ———, *Éléments de mathématique. Algèbre. Chapitre 8*, Hermann, Paris, 1958.

[vdW31] B. VAN DER WAERDEN – *Moderne Algebra. Unter Benutzung von Vorlesungen von E. Artin und E. Noether. Bd. II*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete, Springer, 1931.

[Wed08] J. H. M. WEDDERBURN – « On hypercomplex numbers », *Proc. Lond. Math. Soc.* **6** (1908), p. 77–118.

1. Il y en avait dans l'exposé 1-A, mais pas vraiment dans l'exposé 1-B.
2. Une page ronéotypée, archives de l'IHP.