

LE SÉMINAIRE DE MATHÉMATIQUES 1933–1939

édition réalisée et annotée par
Michèle Audin

3. Année 1935-1936 *Topologie*

André Weil

Application des invariants d'homologie à la caractérisation des classes de représentations

Séminaire de mathématiques (1935-1936), Exposé 3-G, 10 p.

<http://books.cedram.org/MALSM/SMA_1935-1936__3__G_0.pdf>



Cet article est mis à disposition selon les termes de la licence
CREATIVE COMMONS ATTRIBUTION – PAS DE MODIFICATION 3.0 FRANCE.
<http://creativecommons.org/licenses/by-nd/3.0/fr/>

cedram

Exposé mis en ligne dans le cadre du
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques
<http://www.cedram.org/>

APPLICATION DES INVARIANTS D'HOMOLOGIE À LA CARACTÉRISATION DES CLASSES DE REPRÉSENTATIONS

par **André Weil**

On a^[1] déjà eu l'occasion de parler de la distinction entre homologie et homotopie (v. exposé B). On rappelle la définition :

Deux complexes singuliers C^n , C'^n , images continues d'un même complexe simplicial c^n dans un espace topologique donné quelconque, sont dits *homotopes*, si l'on peut les déduire l'un de l'autre par déformation continue. Au moyen du produit topologique d^{n+1} de c^n par le segment $0 \leq t \leq 1$, on peut encore dire que $C^n = f(c^n)$ et $C'^n = f'(c^n)$ sont homotopes si l'on peut définir une fonction continue f sur d^{n+1} , prenant ses valeurs dans l'espace donné (c'est-à-dire une image continue de d^{n+1} dans cet espace) se réduisant à f pour $t = 0$ et à f' pour $t = 1$. Si C'^n se réduit à un point, on dit que C^n est *homotope à zéro*.

On a vu (ibid.) que deux complexes homotopes sont nécessairement homologues. La réciproque n'est pas vraie, comme on sait (voir par ex. l'exposé de Marty sur le groupe de Poincaré^[2]). Mais on doit à H. Hopf d'avoir démontré cette réciproque dans certains cas particuliers très intéressants. C'est à l'exposé de ces résultats (dont une partie avait d'ailleurs été pressentie par Brouwer) que va être consacrée la présente conférence.

1/2

Quand deux représentations^[3] $C^n = f(c^n)$, $C'^n = f'(c^n)$ d'un même complexe c^n dans un même espace définissent des complexes homotopes, il est d'usage de dire aussi que les deux représentations appartiennent à la même *classe* (« *Abbildungsklasse* »). De plus, on a vu que, pour savoir si deux complexes singuliers sont homotopes (ou si deux représentations appartiennent à la même classe) on a à résoudre un problème du type suivant : K étant un complexe donné, K_0 un complexe partiel composé d'éléments de K , déterminer une fonction continue sur K , prenant ses valeurs dans un espace donné (c'est-à-dire une représentation de K dans cet espace), qui prenne sur K_0 des valeurs données ; ou autrement dit, prolonger à K d'une manière continue, une fonction donnée sur K_0 . Un tel problème s'appelle un « *problème de prolongement* » (« *Erweiterungsaufgabe* ») ; nous donnerons aussi les résultats de Hopf sur certains problèmes de ce type.

On a déjà dit (v.exposé de Leray) qu'on peut toujours prolonger dans un espace topologique *normal* quelconque une fonction continue, à *valeurs numériques*, donnée sur un sous-ensemble fermé quelconque de l'espace ; d'où il résulte qu'on peut toujours prolonger aussi une fonction prenant ses valeurs dans un espace euclidien à p dimensions x_1, x_2, \dots, x_p (il suffit de faire le prolongement de chacune des coordonnées x_i séparément).

On désignera par S^n la sphère à n dimensions ; on sait qu'elle est topologiquement identique à la frontière $|\dot{X}^{n+1}|$ d'un simplexe X^{n+1} à $n+1$ dimensions ; on sait aussi que la sphère S^n *pointée* (c'est-à-dire où l'on a enlevé un point p) est topologiquement identique à un espace euclidien R^n à n dimensions, et par suite que la sphère S^n deux fois pointée (c'est-à-dire d'où l'on a enlevé deux points p et q) est topologiquement identique à $R^n - o$ (espace R^n d'où l'on a enlevé un point o).

D'autre part, soit R^{n+1} un espace euclidien à $n+1$ dimensions, S^n la sphère de centre o et de rayon 1 dans R^{n+1} ; à tout point x de $R^{n+1} - o$, faisons correspondre l'intersection $z = \varphi(x)$ de la demi-droite ox avec S^n ; et soit $\rho = \log(ox)$; tout point x de $R^{n+1} - o$ est ainsi représenté par ses coordonnées polaires (z, ρ) d'une manière et d'une seule ; autrement dit, $R^{n+1} - o$ est le produit topologique de S^n par la droite $-\infty < \rho < +\infty$.

Ces préliminaires posés, nous diviserons (d'après Hopf) notre exposé en trois parties.

1ère partie. Représentations de degré 0 de S^n dans S^n

Dans toute cette partie (mais non dans les suivantes), le degré topologique sera pris par rapport à l'anneau des entiers rationnels. On désignera par S^n à la fois la sphère à n dimensions et le cycle algébrique à n dimensions qu'elle définit au signe près (c'est-à-dire, dans une triangulation quelconque de S^n , la base du groupe d'homologie à n dimensions sur S^n , défini par rapport à l'anneau des entiers). Si l'on a une représentation $f(S_0^n) \subset S^n$ d'une sphère S_0^n dans une sphère S^n , le degré de la représentation n'est pas autre chose que le nombre d défini par $f(S_0^n) \sim d \cdot S^n$ (v.conférence précédente).

Si $f(S_0^n)$ est homotope à zéro, on aura $d = 0$. Réciproquement, nous nous proposons de démontrer le théorème suivant :

Théorème I. *Une représentation $f(S_0^n)$ d'une sphère S_0^n dans une sphère S^n , de degré topologique 0 (par rapport à l'anneau des entiers) est homotope à zéro.*

Ce théorème se démontre directement pour $n = 1$; dans ce cas, en effet, on a deux cercles C_0, C ; soient α, β , les arcs^[4] sur ces deux cercles ; la représentation f s'exprimera par une fonction $\beta = f(\alpha)$, et si d est le degré, on aura

$$f(\alpha + 2\pi) = f(\alpha) + 2d\pi$$

Si $d = 0$, f sera périodique, et la formule $f_t(\alpha) = t \cdot f(\alpha)$ définira une représentation de C_0 sur C , se réduisant à la représentation donnée pour $t = 1$, et à zéro pour $t = 0$. c.q.f.d.

Pour $n > 1$, on démontrera le théorème par récurrence sur n . Mais il est utile d'abord d'en donner plusieurs énoncés tous équivalents. 4/5

Soit d'abord B_0^{n+1} la « boule » (« Vollkugel » ^[5]) à $n + 1$ dimensions ayant pour frontière S_0^n dans un espace R^{n+1} où l'on aurait plongé S_0^n (c'est-à-dire, dans un tel espace, l'ensemble des points intérieurs à S_0^n ou situés sur S_0^n). Dire qu'une représentation de S_0^n , dans un espace quelconque, est homotope à zéro, c'est dire qu'on peut trouver $f_t(S_0^n)$ se réduisant à la transformation donnée pour $t = 1$, à un point pour $t = 0$; si nous considérons $f_t(S_0^n)$ comme une représentation de la sphère concentrique à S_0^n et de rayon t (S_0^n étant supposée de rayon 1), on voit que cette fonction définit une représentation de la boule B_0^{n+1} ; réciproquement, si l'on peut trouver une représentation de B_0^{n+1} , se réduisant sur S_0^n à une représentation donnée, il est clair que celle-ci sera homotope à zéro. Le théorème I peut donc être formulé comme suit :

Ia. Une représentation de S_0^n sur S^n , de degré zéro, peut être prolongée à B_0^{n+1} .

Sous cette forme, on peut encore transformer le théorème dans l'énoncé suivant :

Ib. Une représentation de S_0^n dans $R^{n+1} - o$, d'ordre zéro par rapport à 0, peut être prolongée à B_0^{n+1} .

En effet, soit, comme plus haut, $z = \varphi(x)$ le point de la sphère S^n de centre o et de rayon 1 qui se trouve sur ox , et ρ le logarithme du rayon vecteur du point x ; se donner une représentation $f(K)$ d'un complexe quelconque K dans $R^{n+1} - o$ équivaut à se donner une représentation $\varphi[f(K)]$ de K dans S^n , et une représentation $\rho[f(K)]$ de K dans la droite $-\infty < \rho < +\infty$. L'ordre de $f(S_0^n)$ par rapport à o dans $R^{n+1} - o$ n'est pas autre chose (v. conférence précédente) que le degré topologique de $\varphi[f(S_0^n)]$ dans S^n . Donc, si le théorème Ia est vrai, et si l'hypothèse de Ib est satisfaite, on peut prolonger à B_0^{n+1} la fonction $\varphi[f(S_0^n)]$; quant à la fonction $\rho[f(S_0^n)]$ on peut sûrement la prolonger aussi à B_0^{n+1} , puisque c'est une fonction à valeurs numériques : ce qui démontre Ib. D'autre part, Ia suit aussi Ib, car si $f(S_0^n)$ est une représentation de S_0^n dans S^n , de degré zéro, on peut aussi la considérer comme une représentation dans $R^{n+1} - o$, d'ordre 0, donc (si Ib est vrai) la prolonger en une représentation $f(B_0^{n+1})$ dans $R^{n+1} - o$; mais alors $\varphi[f(B_0^{n+1})]$ sera une représentation de B_0^{n+1} dans S^n qui prolonge $f(S_0^n)$, et Ia est démontré. On voit bien que Ia et Ib sont entièrement équivalents. 5/6

D'après les remarques faites plus haut, Ib peut encore s'énoncer comme suit : 6/7

Ic. Une représentation de S_0^n dans $R^{n+1} - o$, d'ordre zéro par rapport à 0, est homotope à zéro.

Enfin, observons que, puisque $R^{n+1} - o$ est topologiquement identique à une sphère deux fois pointée $S^{n+1} - p - q$, on peut énoncer Ib et 1c pour une telle sphère, l'ordre par rapport à o devant être remplacé par l'ordre par rapport au couple de points (p, q) .

Démontrons maintenant d'après Hopf les deux lemmes :

Lemme I. *Soient f, g , deux représentations d'un même espace compact F dans S^n ; supposons qu'il y ait un point p sur S^n , et un sous-ensemble fermé F' de F , tels que f et g coïncident sur $F - F'$, et que les images $f(F')$, $g(F')$ de F' par f et g ne contiennent pas p . Alors f et g sont homotopes.*

En effet, faisons une projection stéréographique de S^n sur R^n de façon que p aille à l'infini. Soit x un point de F' ; soit $f_t(x)$ le point de S^n tel que sa projection stéréographique divise le segment de droite déterminé dans R^n par les projections stéréographiques de $f(x), g(x)$ dans le rapport $t/1-t$: avec les hypothèses du lemme, ce point est bien déterminé. Pour $x \in F - F'$, on prendra $f_t(x) = f(x) = g(x)$. On vérifie immédiatement que $f_t(x)$ est continue en x, t , et se réduit à f pour $t = 0$, à g pour $t = 1$.

Lemme II. *Soit f une représentation de S_0^n dans S^n et $n \geq 2$; soient p, q , deux points de S^n ; A, B , deux hémisphères sur S_0^n (de façon que S_0^n soit la réunion de A et B); alors on peut déformer f en une représentation g pour laquelle $g(A) \not\ni q$, $g(B) \not\ni p$.*

(On voit facilement que ce n'est pas exact pour $n = 1$). Tout d'abord, on remplace f par une approximation simpliciale (assez fine pour qu'elle soit homotope à f , cf. conférence d'Ehresmann), de façon que pour cette approximation, qu'on désignera de nouveau par f , $f^{-1}(p)$ et $f^{-1}(q)$ ne comprennent qu'un nombre fini de points; on peut supposer évidemment aussi, par une déformation convenable de S_0^n en elle-même, que A n'a aucun point commun avec $f^{-1}(q)$. Soit alors x un point de $f^{-1}(p)$ qui ne soit pas dans A , x' un point intérieur à A ; joignons x à x' par une ligne L (image d'un segment) sans point commun avec $f^{-1}(q)$; soit V un voisinage de la ligne L , sans point commun avec $f^{-1}(q)$, et homéomorphe à un simplexe à n dimensions X^n ; d'après le lemme I, une représentation $g(S_0^n)$ dans S^n sera homotope à f pourvu qu'elle coïncide avec f en dehors de \bar{V} , et que dans \bar{V} elle ne prenne pas la valeur q : on obtiendra une telle fonction g à partir de f , par une déformation continue de \bar{V} en lui-même qui laisse fixes tous les points frontières de \bar{V} et qui amène x en x' .

Cela fait, on a g homotope à f , et telle que les points de $g^{-1}(q)$ et $g^{-1}(p)$ coïncident avec les points correspondants pour f à l'exception de l'un des points de $f^{-1}(p)$ qui a été remplacé par un point x' dans A . En continuant ainsi, on amènera un à un tous les points de $f^{-1}(p)$ dans A sans toucher à ceux de $f^{-1}(q)$, et le lemme est démontré (On remarquera que l'existence de la ligne L tenait à l'hypothèse $n \geq 2$).

On peut maintenant démontrer le théorème I: on le démontrera pour $n + 1$ en supposant le théorème Ib vrai pour n . Soit f une représentation de S_0^{n+1} dans S^{n+1} , de

degré zéro ; on peut supposer que f a été remplacée par une représentation homotope (qu'on appellera de nouveau f) satisfaisant aux conditions du lemme II : c'est-à-dire qu'on aura sur S^{n+1} deux points p, q et que S_0^{n+1} sera partagée par son « équateur » S_0^n en deux hémisphères A, B , de façon que $f(A) \not\ni q, f(B) \not\ni p$. Celà étant, on sait (v.conférence précédente) que le degré f est égal au degré local de f en un point quelconque de S^{n+1} , par exemple en p : celui-ci étant la somme des degrés, en ce point, de $f(A)$ et $f(B)$; ce dernier étant nul puisque $f(B) \not\ni p$, il en est de même de $f(A)$: par définition de l'ordre, le degré de $f(A)$ en p est égal à l'ordre de $f(S_0^n)$ par rapport au couple de points p, q ; celui-ci est donc nul ; mais alors on peut appliquer le théorème Ib pour la dimension n (dans sa forme relative à la sphère deux fois pointée $S^{n+1} - p - q$) : d'après ce théorème, la fonction $f(S_0^n)$, qui représente S_0^n dans $S^{n+1} - p - q$, avec l'ordre 0 par rapport à (p, q) , peut être prolongée en une représentation g de A dans $S^{n+1} - p - q$, coïncidant avec f sur S_0^n ; prenons, de plus, $g = f$ dans B ; alors, d'après le lemme I, g est homotope à f . D'autre part, g est alors une représentation de S_0^{n+1} dans $S^{n+1} - p$, ou autrement dit dans un espace euclidien R^{n+1} , et est donc homotope à zéro : il en est donc de même de f . c.q.f.d.

9/10

2ème partie. Problèmes de prolongements relatifs aux représentations dans S^n

Soit K^{n+1} un complexe à $n+1$ dimensions ; $K_0 \subset K^{n+1}$ un complexe partiel composé d'éléments de K^{n+1} ; soit f une représentation de K_0 dans S^n , on va donner des conditions nécessaires et suffisantes pour que f puisse être prolongée au complexe K^{n+1} .

10/11

(On observera comme plus haut, que si, au lieu des représentations dans S^n , on étudiait les représentations dans $R^{n+1} - o$, on aurait un problème complètement équivalent à celui qui nous occupe. On remarquera, d'autre part, que si, au lieu d'un complexe K^{n+1} , on avait un complexe K^m à m dimensions, avec $m \leq n$, le problème serait trivial, le prolongement étant toujours possible : il suffit en effet de considérer le problème relatif aux représentations dans $R^{n+1} - o$; faisons le prolongement dans R^{n+1} d'une manière quelconque, ce qui est toujours possible : cela fait, une déformation infiniment petite nous permettra toujours d'éviter le point o).

Soit C^n un cycle à n dimensions sur K_0 (s'il en existe) formé en prenant pour domaine de définition de coefficients un groupe abélien quelconque G : supposons qu'il soit homologue à zéro sur R^{n+1} : alors, quelle que soit la représentation f de K^{n+1} dans S^n , on aura $f(C^n) \sim 0$ dans S^n avec le degré zéro : c'est donc là une condition nécessaire à laquelle doit satisfaire la fonction f , supposée donnée sur K_0 , pour pouvoir être prolongée à K^{n+1} ; si d'ailleurs C^n est déjà ~ 0 sur K_0 , la condition est identiquement satisfaite. Nous allons démontrer la réciproque, d'après Hopf, sous la forme suivante :

11/12

Théorème II. *Pour que la représentation f de K_0 dans S^n puisse être prolongée à K^{n+1} , il suffit que $f(C^m) \sim 0$ sur S^n quel que soit le cycle C^m sur K_0 , formé soit avec l'anneau des entiers ordinaires, soit avec l'anneau des entiers mod. m , non homologue à zéro sur K_0 mais homologue à zéro sur K^{n+1} .*

On va s'appuyer sur le lemme suivant, qui vaut pour tous les problèmes de prolongement :

Lemme. *Soit $f(K_0)$ une représentation de K_0 dans un espace quelconque Q ; si l'on peut prolonger f à une représentation $f(K^{n+1})$ dans Q , l'on peut prolonger aussi à K^{n+1} toute représentation $g(K_0)$ homotope à $f(K_0)$.*

En effet, soit K^m le complexe formé par tous les éléments de K^{n+1} qui sont au plus à m dimensions; on va démontrer qu'on peut prolonger g à K^m successivement pour $m = 0, 1, 2, \dots$, d'où il résultera le théorème pour $m = n + 1$. C'est évident pour $m = 0$, il suffit de définir arbitrairement g en tous les sommets de K^{n+1} qui n'appartiennent pas déjà à K_0 . Supposons donc qu'on ait défini g sur K^m de façon que $g(K^m + K_0)$ soit homotope à $f(K^m + K_0)$; soit X^{m+1} un simplexe de K^{n+1} , à $m + 1$ dimensions, n'appartenant pas à K_0 ; on définira g dans X^{m+1} comme suit. Soit o un point intérieur à X^{m+1} , X'^{m+1} l'homothétique de X^{m+1} dans l'homothétie
^{12/13} de centre o et de rapport $1/2$: soit X' le point de X'^{m+1} correspondant, dans cette homothétie, à un point x de X^{m+1} , on définira g , dans X'^{m+1} par $g(x') = f(x)$; g se trouve ainsi déterminé sur la frontière de $X^{m+1} - X'^{m+1}$ (qui est homéomorphe au produit topologique de la frontière de X^{m+1} par un segment) une fonction se réduisant à g sur la frontière de X^{m+1} , à f sur la frontière de X'^{m+1} : nous prendrons g égal à cette fonction dans $X^{m+1} - X'^{m+1}$. G est ainsi défini dans K^{m+1} , ce qui démontre le lemme par récurrence sur m .

Passons maintenant au théorème II. Au lieu de S^n , nous raisonnerons (ce qui revient au même) sur la frontière $|\dot{X}^{n+1}|$ d'un simplexe X^{n+1} à $n + 1$ dimensions; f étant donnée sur K_0 , f est homotope (v.exposé Ehresmann) à la représentation simpliciale, dans $|\dot{X}^{n+1}|$, d'une subdivision suffisamment fine de K_0 ; d'après le lemme, il suffit de raisonner sur celle-ci, qu'on appellera de nouveau f : autrement dit, nous supposons que f est une représentation simpliciale de K_0 dans $|\dot{X}^{n+1}|$. Soit K^m l'ensemble des éléments à au plus m dimensions de K^{n+1} : nous définirons f sur K^{n-1} en faisant correspondre à tout sommet de K^{n+1} un sommet arbitraire de X^{n+1} , et en prenant
^{13/14} f simpliciale sur K^{n-1} . Supposons un instant qu'on ait pu prolonger f à K^n , et essayons de faire le prolongement à K^{n+1} . Pour cela soit x^{n+1} un simplexe à $n + 1$ dimensions de K^{n+1} : il s'agira, f étant donnée sur la frontière de x^{n+1} , de prolonger à x^{n+1} ; ce problème est identique à celui qui consiste à prolonger une fonction, donnée dans une sphère S_0^n , à la boule B_0^{n+1} , et qui a été traité dans la première partie: il faut et il suffit, pour que ce soit possible, que $f(\dot{x}^{n+1}) \sim 0$ sur $|\dot{X}^{n+1}|$. Le problème est donc ramené au suivant: f étant connue, sur K^{n-1} et sur K_0 , définir f sur

K^n de façon qu'on ait $f(\dot{x}^{n+1}) \sim 0$ quel que soit x^{n+1} sur K^{n+1} ; ou encore z^n désignant n'importe quel complexe algébrique à n dimensions sur K^{n+1} , de façon que $f(z^n) \sim 0$ chaque fois que $z^n \sim 0$. Pour définir une telle fonction f (supposée donnée sur $K^{n-1} + K_0$) choisissons un simplexe Y^n (orienté) sur $|\dot{X}^{n+1}|$; et supposons qu'on sache déterminer une fonction $\chi(x^n)$ des simplexes à n dimensions (orientés) de K^{n+1} , prenant ses valeurs dans l'anneau des entiers ordinaires, et satisfaisant aux deux conditions suivantes :

1°- Si x^n appartient à K_0 , $\chi(x^n)$ est égale au degré de $f(x^n)$ sur Y^n (c'est-à-dire, puisque f est simpliciale sur K_0 , $\chi(x^n) = +1, -1$ ou 0 suivant que $f(x^n) = +Y^n, -Y^n$, ou $\neq \pm Y^n$);

14/15

2°- quel que soit le cycle $z^n = \sum_i c_i x_i^n$ (formé avec l'anneau des entiers) homologue à zéro sur K^{n+1} , on a

$$\chi(z^n) = \sum_i c_i \chi(x_i^n) = 0.$$

Dans ces conditions, soit x^n un simplexe de K^{n+1} à n dimensions, n'appartenant pas à K_0 , et soit $\chi(x^n) = \pm k$, k étant entier et ≥ 0 ; marquons, à l'intérieur de x^n , k petits simplexes (sans points communs deux à deux) : dans chacun de ceux-ci, définissons f comme une représentation simpliciale de ce simplexe sur Y^n , avec une orientation positive ou négative suivant que $\chi(x^n)$ est $>$ ou $<$ 0 ; dans tout le reste de x^n , définissons f de façon qu'elle n'y prenne que des valeurs appartenant à $\overline{X}^{n+1} - \overline{Y}^n$ (ce qui est toujours possible, ce dernier ensemble étant homéomorphe à l'intérieur de la sphère). La fonction f ainsi définie satisfait aux conditions requises, car si z^n est un cycle ~ 0 sur K^{n+1} , le degré de $f(z^n)$ dans $|\dot{X}^{n+1}|$ est égal au degré local en un point intérieur de Y^n , et celui-ci n'est autre chose que $\chi(z^n) = 0$.

Tout se trouve donc ramené à la détermination de la fonction $\chi(x^n)$, et il ne reste plus qu'à faire voir que les hypothèses de l'énoncé permettent de trouver une telle fonction; ces hypothèses peuvent d'ailleurs se formuler ainsi : quel que soit le cycle z^n sur K_0 , $\sim 0 \pmod{m}$ sur K^{n+1} on a $\chi(z^n) = 0 \pmod{m}$; et cela, m étant 0 ou un entier naturel quelconque. On est ainsi ramené à une question purement arithmétique, qui d'ailleurs ne présente pas de difficultés, et au sujet de laquelle nous renvoyons le lecteur à Hopf-Alexandroff.

15/16

Il est intéressant d'observer qu'au lieu de faire l'hypothèse de l'énoncé pour le cas de l'anneau des entiers mod. m quel que soit m , il revient au même de faire cette hypothèse pour un seul domaine de coefficients, à savoir le groupe des nombres rationnels (ou des nombres réels) modulo 1.

3ème partie.— Application aux classes de représentation

Puisque, pour décider si deux représentations $f(K^n)$ $f'(K^n)$ d'un complexe K^n dans la sphère S^n appartiennent à une même classe, il suffit de résoudre un problème de prolongement sur le produit topologique de K^n par un segment, les résultats précédents sont applicables. Soit donc K^{n+1} le produit de K^n par le segment $0 \leq t \leq 1$; soient K^n , K'^n les complexes partiels de K^{n+1} correspondant respectivement à $t = 0$ et à $t = 1$: il s'agit de savoir si l'on peut déterminer une représentation de K^{n+1} dans S^n , se réduisant à f sur K^n et à f' sur K'^n . Soit z^n un cycle sur $K^n + K'^n$; il sera somme d'un complexe algébrique $-x'^n$ sur K'^n ; on doit avoir $\dot{x}^n - \dot{x}'^n = 0$, d'où, puisque K^n et K'^n sont sans point commun, $\dot{x}^n = \dot{x}'^n = 0$, c'est-à-dire que x^n et x'^n sont des cycles; on vérifie immédiatement que pour que $z^n = x^n - x'^n \sim 0$ sur K^{n+1} , il faut et il suffit que x'^n , sur K'^n , appartienne à la classe d'homologie qui correspond à celle à laquelle appartient x^n sur K^n . L'application du théorème II donne alors :

Théorème III. *Pour que deux représentations f , f' de K^n dans S^n appartiennent à la même classe, il faut et il suffit que l'on ait, quel que soit le cycle x^n pris sur K^n par rapport à l'anneau des entiers ordinaires ou à celui des entiers mod. m , $f(x^n) \sim f'(x^n)$ sur S^n ; ou autrement dit, que tout cycle x^n soit représenté, par f et par f' , avec le même degré topologique sur S^n .*

On exprime ce théorème en disant que, lorsqu'il s'agit de représentations d'un complexe K^n à n dimensions dans S^n , la classe d'une représentation est entièrement déterminée par son type homologique.

En particulier, la classe d'une représentation de S^n dans S^n est complètement déterminée par son degré.^[6]

^{17/18} En revanche, le type homologique ne suffit nullement en général pour déterminer la classe d'une représentation, et Hopf a montré que les résultats de la première partie ne peuvent être étendus au cas de deux sphères de dimensions quelconques; plus précisément, il existe une représentation non homotope à zéro de S^{4n-1} sur S^{2n} , quel que soit n ; or, dans une telle représentation, tout cycle à $2n$ dimensions sur S^{4n-1} est homologue à zéro sur S^{4n-1} et est donc a fortiori représenté sur S^{2n} avec le degré zéro, de sorte que la représentation a même type homologique qu'une représentation homotope à zéro. Dans le cas $n = 1$ la représentation de Hopf peut se définir d'une manière très simple : comme on sait, S^3 est un espace de groupe, et à tout point s de S^3 il est possible de faire correspondre une rotation autour de o dans l'espace ordinaire R^3 ; soit A un point fixe sur la sphère S^2 de centre o dans R^3 , P sont transformé par la rotation s : la transformation $(s \rightarrow P)$ constitue une représentation de S^3 dans S^2 , et Hopf démontre qu'elle n'est pas homotope à zéro (cela résulte d'ailleurs aussi d'un théorème très général de Hurewicz, provenant de sa théorie des ^{18/19} groupes d'homotopie d'ordre supérieur).^[7]

Bibliographie. L'exposé ci-dessus a été fait d'après Hopf-Alexandroff. Sur la représentation de S^{4n-1} dans S^{2n} et le très intéressant problème lié à celui-là, des représentations de $S^n \times S^n$ dans S^n v. H.HOPF, *Fundam.Math.* t.25.^[8]

Cf. aussi Freudentahl, Die Hopfsche Gruppe, *Compos.Math.* vol.2; et d'autre part les notes de Hurewicz sur sa théorie des groupes d'homotopie (*Proc.Acad. Amsterdam* 1935–36).

Notes

1. La référence principale pour cet exposé est le livre d'Alexandroff et Hopf [AH35]. La bibliographie mentionne aussi l'article [Hop35] de Hopf (voir les notes suivantes) ainsi que, pour la définition des groupes d'homotopie, l'article [Fre35] de Freudenthal et les quatre notes [Hur35a, Hur35b, Hur36a, Hur36b] de Hurewicz.

2. L'exposé, à venir, 3-I.

3. Dans le titre comme dans l'exposé, le mot représentation désigne une application (voie les notes de l'exposé 1-E). La notation $Y = f(X)$ désigne ce que nous écririons $f : X \rightarrow Y$.

4. Le mot arc désigne la longueur de l'arc (c'est-à-dire l'angle).

5. Voici l'apparition moderne de la boule et de son bord la sphère... jusque là « sphère » désignait ce que l'on appelle désormais une boule. Ici on a besoin des deux à la fois, il faut donc être précis!

6. En termes (à peine) plus modernes, $\pi_n(S^n) \cong \mathbf{Z}$.

7. L'application $S^3 \rightarrow S^2$ décrite est la « fibration de Hopf »; elle engendre le groupe $\pi_3(S^2) \cong \mathbf{Z}$.

8. Le « très intéressant problème » est celui de l'existence d'applications $S^{4n-1} \rightarrow S^{2n}$ d'invariant de Hopf égal à 1. Elle ne sera résolue (par la négative, sauf les cas de S^2 , S^4 et S^8) qu'à la fin des années 1950, par John Franck Adams [Ada60]. Voir ici page 102.

Quelques jours avant de faire son exposé, André Weil avait écrit une lettre à Élie Cartan dans laquelle, à propos du séminaire, il posait la question de l'invariant de Hopf 1. Cette lettre est conservée aux archives de l'Académie des sciences et reproduite dans [Aud11, p. 474].

Références

- [Ada60] J. F. ADAMS – « On the non-existence of elements of Hopf invariant one », *Ann. Math.* **72** (1960), p. 20–104.
- [AH35] P. ALEXANDROFF & H. HOPF – *Topologie*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 45, Springer-Verlag, Berlin, 1935.
- [Aud11] M. AUDIN – *Correspondance entre Henri Cartan et André Weil*, Documents mathématiques, Société mathématique de France, Paris, 2011.
- [Fre35] H. FREUDENTHAL – « Die Hopfsche Gruppe, eine topologische Begründung kombinatorischer Begriffe. », *Compos. Math.* **2** (1935), p. 134–162.
- [Hop35] H. HOPF – « Über die Abbildungen von Sphären auf Sphären niedrigerer Dimension. », *Fundam. Math.* **25** (1935), p. 427–440.

- [Hur35a] W. HUREWICZ – « Beiträge zur Topologie der Deformationen. I. Höherdimensionale Homotopiegruppen », *Proc. Akad. Wet. Amsterdam* **38** (1935), p. 112–119.
- [Hur35b] ———, « Beiträge zur Topologie der Deformationen II. Homotopie- und Homologiegruppen », *Proc. Akad. Wet. Amsterdam* **38** (1935), p. 521–528.
- [Hur36a] ———, « Beiträge zur Topologie der Deformationen. III. Klassen und Homologietypen von Abbildungen », *Proc. Akad. Wet. Amsterdam* **39** (1936), p. 117–126.
- [Hur36b] ———, « Beiträge zur Topologie der Deformationen. IV. Asphärische Räume », *Proc. Akad. Wet. Amsterdam* **39** (1936), p. 215–224.